TC PC II (Jaquet)

SS2003 Bemerkungen zur Vorlesung 29.4.2003:

Harmonischer Oszillator:

der Operator der potentiellen Energie: $\hat{V} = bx^2$ (und nicht $\hat{V} = ax^2$, da das Symbol a schon in der Wellenfunktion vorkommt)

der Operator der kinetischen Energie: $\hat{T} = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$

Wellenfunktion = Versuchsfunktion: $\psi = e^{-ax^2}$

a und b sind nicht vorgegeben.

Versuch einer Lösung: $\hat{H}\psi = E\psi = (\hat{T} + \hat{V})\psi$

(1) $\hat{T}\psi = \frac{-\hbar^2}{2m}((-2ax)^2 - 2a)e^{-ax^2}$

(2) $\hat{V}\psi = bx^2 e^{-ax^2}$

(3) $\hat{H}\psi = \frac{-\hbar^2}{2m}((-2ax)^2 - 2a)e^{-ax^2} + bx^2 e^{-ax^2} = Ee^{-ax^2}$

(4): durch e^{-ax^2} dividieren:

$\frac{-\hbar^2}{2m}((-2ax)^2 - 2a) + bx^2 = E$

(5): damit x nicht mehr vorkommt, müsste folgendes vorliegen:

$\frac{-\hbar^2}{2m}(-2ax)^2 = -bx^2$

(6): damit bliebe übrig: $\frac{-\hbar^2}{2m}(-2a) = E$

(7): aber was ist a: Gleichung (5) auflösen:

$a = \frac{1}{2}\sqrt{2mb/\hbar^2}$

(8): was steht im Atkins: b sei $\frac{1}{2}k$: daraus folgt: $a = \frac{1}{2}\sqrt{mk/\hbar^2}$

(9): im Atkins steht: die Wellenfunktion sei $\psi = e^{-y^2/2}$ mit $y = x(\frac{mk}{\hbar^2})^{\frac{1}{4}}$

(10): das ist aber unser $e^{-ax^2} = e^{-(\frac{1}{2}\sqrt{mk/\hbar^2})x^2} = e^{-y^2/2}$

Man sieht also, dass e^{-ax^2} eine Lösung für den harmonischen Oszillator ist,

ohne dass wir etwas über die komplizierte Form von y wissen mussten.

(11): und was ist E: $E = \frac{-\hbar^2}{2m}(-2a) = \frac{-\hbar^2}{2m}(-2\frac{1}{2}\sqrt{mk/\hbar^2}) = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2}\hbar\omega$

mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. q.e.d.