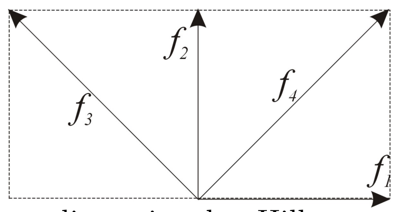
Lsg. 1)



$f_3 = \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = f_2 - f_1;$
$f_4 = 1 = \sin^2 x + \cos^2 x = f_1 + f_2$

Dieser Unterraum, Funktionenraum, Vektorraum des ∞-dimensionalen Hilbertraums ist eine Ebene, die von den 4 linear abhängigen Vektoren f_1 bis f_4 aufgespannt wird.

Lsg. 2)

a) $|f_1|^2 = (1-i; -i+1) \cdot \begin{pmatrix} 1+i \\ i+1 \end{pmatrix} = (1-i)(1+i)+(1-i)(1+i) = 1+1+1+1 = 4; |f_1| = 2$

$\langle f_1|f_2\rangle = (1-i; 1-i) \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ -1+i \end{pmatrix} = (1-i)(1-i) - (1-i)(1-i) = 0; \alpha = \pi/2 \;\; (90°)$

b) $|f_1|^2 = \int_0^{2\pi} d\phi \cdot e^{-i\phi} \cdot e^{+i\phi} = \int_0^{2\pi} d\phi \cdot 1 = 2\pi; |f_1| = \sqrt{2\pi}$

$\langle f_1|f_2\rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \cdot e^{-i\phi} \cdot e^{-i\phi} = \int_0^{2\pi} d\phi \cdot e^{-2i\phi} = \frac{1}{-2i} e^{-2i\phi}|_0^{2\pi} = i/2(1-1) = 0;$

f_1 und f_2 sind auf dem gegebenen Intervall orthogonal.

Lsg. 3)

$\int_0^{2\pi} dx \cdot (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 \cdot \int_0^{2\pi} dx \cdot f_1(x) + c_2 \int_0^{2\pi} dx \cdot f_2(x)$

Der Integraloperator kann in die Klammer reinmultipliziert werden, also ist er linear.

Lsg. 4)

a) Det $\begin{pmatrix} 0-\lambda & i \\ -i & 0-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (-i^2) = \lambda^2 - 1 = 0; \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

(Operator ist selbstadjungiert-hermitesch: Eigenwerte sind reell)

$\lambda_1 : \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 + ic_2 \\ -ic_1 - c_2 \end{pmatrix} = 0; c_1 = ic_2; c_1 = -c_2/i = ic_2; \vec{c} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} /\sqrt{2}$ bei Normierung auf 1.

b) $i \cdot d/dx \circ f(x) = f(x) \cdot \lambda; f(x) = ce^{-i\lambda x}$ für beliebiges komplexes λ und beliebigem Normierungsfaktor c.

Lsg. 5)

$\int_a^b dx \cdot f_1(x) \cdot d^2/dx^2 \circ f_2(x) = \int_a^b dx \cdot f_1(x) \cdot f_2''(x) = -\int_a^b dx \cdot f_1'(x) \cdot f_2'(x) + [f_1(x) \cdot f_2'(x)]_a^b$

$\int_a^b dx \cdot d^2/dx^2 \circ f_1(x) \cdot f_2(x) = \int_a^b dx \cdot f_1''(x) \cdot f_2(x) = -\int_a^b dx \cdot f_1'(x) \cdot f_2'(x) + [f_2(x) \cdot f_1'(x)]_a^b$

Beide Zeilen sind gleich im Falle dass $f_i(a) = f_i(b) = 0$. Q.e.d.

Hinweis: Der Erwartungwert von d^2/dx^2, d.h. $\langle f|d^2/dx^2 f\rangle / \langle f|f\rangle = -\int dx \cdot f' \cdot f' / \int dx f \cdot f$ = negative Zahl / positive Zahl < 0.